UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Optimizando los problemas de derivadas

Autor/es

SATURIO CARBONELL URTUBIA

Director/es

CLARA JIMÉNEZ GESTAL

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2018-19

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

Optimizando los problemas de derivadas

Autor

Saturio Carbonell Urtubia

Tutora: Clara Jiménez Gestal

MÁSTER:
Máster en Profesorado, Matemáticas (M06A)

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2018/2019

ÍNDICE

RESUMEN

En 1º de bachillerato se explica por primera vez la derivada. Este concepto, aunque es novedoso para los alumnos, no supone un problema a la hora de aprenderlo. Sin embargo, las aplicaciones de la derivada en los problemas de optimización sí que lo son.

En este proyecto de innovación he detectado dicha dificultad y una posible forma de corregirla. Para la corrección de dicha dificultad se ha planteado la herramienta GraspableMaths que permite una explicación más dinámica en la corrección de problemas de optimización y la posibilidad de que el alumno interaccione directamente con el problema.

Además, se utilizará como base para que el alumno desarrolle sus propios enunciados en una actividad de invención de problemas.

ABSTRACT

The derivative is explained for the first time in High School. This concept, although it is new for students, is not a problem when it comes to learning it. However, the applications of the derivative in the optimization problems are, in fact, a problem.

In this innovation project I have detected this difficulty and a possible way to correct it. For the correction of this difficulty, the GraspableMaths tool has been proposed, which allows a more dynamic explanation in the correction of optimization problems and the possibility that the student interacts directly with the problem.

In addition, it will be used as a basis for the student to develop their own problems in an invention activity.

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Las derivadas se explican por primera vez en las matemáticas correspondientes a 1º de bachillerato. En las aplicaciones de la derivada que se explican en ese mismo nivel se encuentran los problemas de optimización. Estos problemas son una aplicación directa de la derivada y se pueden encontrar en contextos reales de forma más habitual que otro tipo de problemas. En su resolución no se requieren pasos complicados pero el alumnado tiende a bloquearse y a encontrarlos difíciles.

Esa dificultad es lo que hace necesario el desarrollo de este proyecto. Dicha dificultad la he observado durante el periodo de prácticas en los alumnos y ha sido expresada también por parte de otros profesores de matemáticas. Por lo tanto, se trabajará la parte de la resolución de problemas de optimización.

En la vida diaria comúnmente se resuelven problemas de optimización, eligiendo un producto, cuando se busca el mejor recorrido para llegar a un lugar, cuando se planea un día de actividades, se busca optimizar el tiempo. En ninguna de estas situaciones se emplea Matemática formal para encontrar lo que se busca, sino que se resuelve la problemática utilizando la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente se llega a la solución óptima.

En la resolución de los problemas de optimización, en los cursos de bachillerato, se utiliza el concepto de la derivada para obtener los máximos y mínimos de las funciones. La resolución por parte de los estudiantes se hace generalmente de forma automática y sin ser realmente conscientes de las implicaciones de la derivación. No se desarrolla una actitud científica que involucre la intuición, la expresión de la conjetura, la formalización y el rigor matemático.

Para conseguir desarrollar estas actitudes se plantea una intervención didáctica centrada en el alumno. En ella se busca una participación activa de los estudiantes en actividades en grupo e individuales que les motiven y consigan que comprendan el concepto de forma global. Se trabajará con nuevas metodologías y técnicas que buscan obtener el mayor potencial de ellos mismos a través de las TICs y el aprendizaje interpersonal. Se plantean sesiones que van más allá del método habitual para conseguir interiorizar el aprendizaje mediante la reflexión guiada de lo estudiado. Finalmente, los alumnos mostrarán los conocimientos adquiridos con la exposición de un problema de optimización, que ellos mismos han diseñado, con herramientas tecnológicas que les permitirán alcanzar un conocimiento estable y duradero.

OBJETIVOS

Detectadas las dificultades de los estudiantes de bachillerato con los problemas de optimización este trabajo se plantea los siguientes objetivos:

- Realizar una revisión teórica y metodológica para profundizar en el estado de la cuestión.
- Elaborar un material educativo de calidad orientado a los problemas de optimización. Para la elaboración del mismo se aprovecharán las ventajas de las tecnologías actuales.
- Aumentar mi conocimiento en herramientas tecnológicas como GraspableMaths a la vez que se desarrolla la capacidad de curación de contenido.
- Establecer un contexto en el cual aplicar la invención de problemas para conseguir un mejor aprendizaje de los contenidos.
- Conseguir motivar a los alumnos con el material de la intervención didáctica para fomentar un gusto por las matemáticas y en su defecto facilitarles un conjunto de herramientas para resolver los problemas

Como resultado de la aplicación al aula de la intervención diseñada se espera producir algunos cambios significativos en el alumnado como pueden ser:

- Formular y resolver problemas de optimización. De una forma ordenada y con rigor matemático, de tal forma que los alumnos sean conscientes de los pasos necesarios y su fundamentación.
- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de

modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

- Desarrollar estrategias para defender sus argumentos frente a los de sus compañeros, permitiéndoles comparar distintos criterios para poder seleccionar la respuesta más adecuada.
- Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, Internet, Geogebra, WolframAlpha, GraspableMaths, etc.) para realizar cálculos y resolver problemas de optimización.

MARCO TEÓRICO Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

En las clases del Máster de profesorado se nos han transmitido una serie de conocimientos para lograr que en el futuro podamos ser buenos docentes. Una de las lecciones que he tenido presente a lo largo del curso es que para elaborar un material de calidad hay tener presente el público al que nos dirigimos, es decir, el alumno. Para conectar con el alumnado en la propuesta de intervención se ha utilizado un gran número de herramientas, técnicas y metodologías que pretenden conseguir motivar y lograr un aprendizaje significativo.

Por lo tanto, considero que un adecuado punto de partida para este marco teórico es el alumno, concretamente la adolescencia. Después se dará paso al contenido matemático, explicando el proceso de enseñanza de las matemáticas, mostrando que efectivamente existe una dificultad con los problemas de optimización. Por último, se presentarán dos frentes de actuación con los estudiantes: la invención de problemas y el uso de las TICs en diferentes formatos.

En 1º de Bachillerato los alumnos se encuentran en la adolescencia media-tardía (dependiendo de la fuente consultada). Lo que sí que está claro es que sufren unos cambios biopsicosociales que pueden afectar a su rendimiento y desempeño en las clases.

En los cambios físicos se produce una continuación de los que ya se iniciaron anteriormente por lo que este aspecto no es de excesiva importancia en esta etapa. Sin embargo, sí que se producen cambios psicológicos en el área cognitiva, emocional y social.

En el área cognitiva se consolidan las habilidades relacionadas con el razonamiento y el pensamiento abstracto que habían empezado previamente a desarrollarse. Por lo que pueden ir más allá en la forma de analizar las situaciones y razonar sobre temas más complejos (aunque en situaciones de estrés vuelvan a un pensamiento concreto, no abstracto).

En cuanto a su desarrollo emocional, los adolescentes en esta etapa aumentan el rango de las emociones que pueden experimentar, así como la capacidad de pensar sobre lo que experimentan los demás y su empatía. Aunque puede ser más fácil pensar en las emociones y sentimientos de los demás, sigue predominando el narcisismo.

Socialmente adquiere gran importancia el concepto de grupo de pares. El autoconcepto del adolescente está muy relacionado con su grupo de pares, que en estos años es muy influyente, tanto que puede afectar a su conducta directamente.

Además de la adolescencia, los alumnos se encuentran inmersos en una nueva etapa educativa (bachillerato), lo que les puede afectar.

Durante mi periodo de prácticas tuve clase con alumnos de 1º de bachillerato y saqué algunas conclusiones del grupo clase:

- Son conscientes de que las matemáticas son necesarias para sus futuras carreras y/o para obtener buena nota en el EBAU.
- Los roles en clase empiezan a definirse: hay algunos más graciosos, otros trabajadores, pero en general el alumno tiene una actitud positiva hacia las matemáticas.

Así pues, una vez vista la etapa en la que se encuentran (los estudiantes) procedemos a mostrar cómo se trabajará el tema desde el punto de vista matemático. Sin embargo, antes de centrarnos en el contenido que se pretende explicar a los alumnos (problemas de optimización), debemos tener en cuenta los aspectos más relevantes de los **procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas**. En particular, haremos referencia al Enfoque Ontosemiótico (EOS).

El EOS ha sido desarrollado por Godino y sus colaboradores y está orientado a explicar los procesos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, como dicen Baccelli, Anchorena, Moler y Aznar (2013), tiene en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado (p. 101).

Godino, junto con otra serie de autores, considera y concluye que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos (Godino, Batanero y Font, 2007).

En el enfoque que realizan estos autores el punto de partida es una **situación/problema** que es planteada mediante **lenguajes verbales y simbólicos**. Los lenguajes utilizados sirven para trasmitir un conjunto de **conceptos**, **proposiciones** y **procedimientos** que se aplican para elaborar unos **argumentos** que deciden si el resultado es correcto.

Por lo tanto, en una resolución de problemas matemáticos se activa un conglomerado formado por: situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Dicha configuración es la que se presenta en la figura 1:

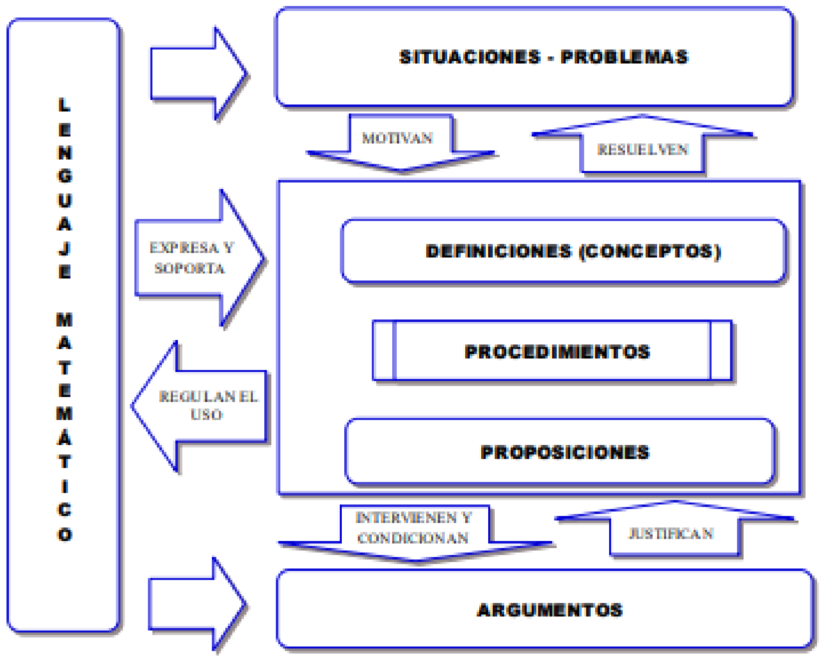


Figura 1. Configuración EOS. Godino, Batanero y Font 2007 p. 7

Esta configuración que se ha presentado es la que se tomará como referencia para estudiar los problemas de optimización.

La presencia de dificultades a la hora de resolver problemas de optimización las pude observar durante el periodo de prácticas tanto en 1º como 2º de bachiller. Además, otros profesores con amplia experiencia docente me confirmaron que, en efecto, los alumnos tienen dificultades para resolver los problemas de optimización.

Dichas dificultades se analizan también en Baccelli, et al. (2013) para estudiantes de Ingeniería, lo que nos hace ver que las carencias del bachillerato se extienden al ámbito universitario y refuerza la importancia de intervenir en la etapa temprana. En esta investigación descubren que las mayores dificultades de los estudiantes residen en los procedimientos de resolución y que en el artículo denominan prácticas de resolución.

> *Estas prácticas suelen, en general, priorizar el cálculo de derivadas dejando en segundo plano la formulación y la resolución de problemas, que debería ser la actividad central donde intervienen los objetos primarios, en especial los procedimientos fundamentales para dicha resolución. Esta misma situación suele trasladarse a los instrumentos de evaluación, mediante los cuales los alumnos logran la aprobación sin la resolución satisfactoria de problemas de optimización (…). (p. 112)*

La sugerencia de subsanación de las dificultades observadas se basa en “desarrollar estrategias de enseñanza y evaluación que, por un lado, contribuyan a identificar y aprender los procedimientos involucrados en la resolución de problemas de optimización y, por otro, permitan identificar los puntos críticos del aprendizaje”.

Tras ver las dificultades que tienen los estudiantes en el ámbito universitario, estudiemos como se trabajan habitualmente los problemas de optimización en los libros de texto de bachillerato.

En el sistema educativo español se estudian problemas de optimización en los niveles de Bachillerato. Concretamente, en la modalidad de Ciencias y Tecnología (1º y 2º) y la de Ciencias Sociales (2º). En cualquiera de los niveles aparecen las dificultades de comprensión más importantes de la optimización, al estar relacionadas con los conceptos de la noción de derivada.

En un estudio sobre los libros de bachillerato, Balcaza, Contreras y Font (2017) afirman que en general los libros no profundizan en el tema y no van más allá de los ejemplos, por lo que fallan en dar a la optimización un "sentido global". Respecto a los contenidos que podemos encontrar habitualmente en los libros:

> *Los ejemplos que se utilizan para facilitar la compresión del discurso son repetitivos. En la resolución de los problemas de optimización apenas son incluidos para el caso de funciones que presenten puntos no derivables o discontinuidades, siendo probablemente estas cuestiones las que mayores dificultades presenten para los alumnos. (p. 1074)*

En base a este artículo, y al de Camacho y González (1998) se puede observar que los tipos de problemas presentados en los libros de bachillerato actuales son mucho más reducidos a los que se hacían anteriormente. Sin embargo, no se ha producido una mejora en las resoluciones por parte de los alumnos. Lo cual nos lleva a pensar que, aunque se da menos contenido, este sigue sin ser adquirido por los alumnos.

A continuación, se presentará un estudio realizado a alumnos de 2º de bachiller en Tarragona realizado por Giné y Deulofeu (2012) para saber dónde fallan exactamente.

En el estudio se les presentaron a los alumnos 5 problemas para que los resolvieran. Los dos primeros (1.1, 1.2) no se podían resolver por el método habitual porque la función era de números enteros y el máximo se daba fuera del dominio, respectivamente. Los tres últimos se resolvían con el método habitual, el primero era de minimizar tiempo al cruzar dos medios con velocidades distintas, el segundo de maximizar dos áreas dentro de un trapecio y el tercero era la lata de refresco con coeficientes de precio en las diferentes áreas.

En la tabla 1 extraída del estudio se puede observar que el desempeño de los alumnos en los problemas no fue bueno.

Problemas	Total	Con respuesta	Correctos	Obtienen correctamente la función a optimizar	El método prevale a la interpretación según el contexto	Usan el método estándar
1.1	40	40	17	23	4	6
1.2	40	36	3	24	17	11
2.1	40	32	0	3	3	10
2.2	40	31	2	5	1	6
2.3	40	33	4	12	1	10

Tabla 1. Desempeño global en optimización. Giné y Deulofeu 2012 p. 92

En base a esta información (y otras gráficas que se pueden observar en el estudio original), presentan dos conclusiones importantes, una sobre el abordaje de los problemas y la segunda sobre la interpretación del resultado.

En los problemas de tipo 1, el 40% se plantean con el método estándar pero únicamente el 30% de los abordajes correctos lo utilizan. Sin embargo, En el tipo 2, el 60% de los abordajes usa el método estándar y los únicos alumnos que plantean bien los problemas son los que han usado este método.

Por lo tanto, como indica el artículo, “Constatamos pues que el método estándar no tiene una influencia significativa sobre el abordaje de los problemas de tipo 1. Sí la tiene, en cambio, en el abordaje de los de tipo 2.” (Giné y Deulofeu 2012, p. 94)

Sobre la interpretación del resultado, los investigadores concluyen que el conocimiento que tenga del método estándar o la base matemática del alumno no influye en la resolución correcta de los problemas de tipo 1, ya que en dichos problemas era necesario interpretar la solución. Esta conclusión es muy relevante y “contradice la conclusión de que si los estudiantes están entrenados para desarrollar procesos algorítmicos, cuando se les propone un problema no rutinario donde el algoritmo no da directamente la solución, no saben interpretarlo”. Personalmente esto me sugiere que hay que confiar en la intuición de los alumnos y trabajar desde esa intuición para construir nuevo conocimiento.

Una vez presentados los problemas (de base) más destacados del área de optimización, se plantean principalmente dos estrategias innovadoras para tratar de subsanar dichas dificultades. La primera estrategia planteada es la invención de problemas, concepto que se trabajó durante las clases de Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. La segunda es utilizar las TICs, concretamente una herramienta software llamada GraspableMaths (GM), que aporta grandes beneficios tecnológicos.

Para mostrar las bondades de la invención de problemas se ha tomado como referencia el artículo de Ayllón y Gómez (2014) donde hacen una revisión de los artículos más importante sobre invención de problemas y su relación con campos como "la resolución de problemas, la instrucción, la tecnología, la evaluación y los métodos de enseñanza".

En general la invención de problemas requiere un mayor esfuerzo y nivel de conocimiento que la resolución, por lo que mejora las capacidades del alumno. Cuando un individuo inventa un problema alcanza niveles de reflexión complejos, llegando a una etapa de razonamiento donde es posible construir el conocimiento matemático.

En el artículo se distinguen 6 aspectos positivos de la invención de problemas en las matemáticas. El primero es el aumento de conocimiento que hemos comentado previamente. Dos aspectos (2º y 5º) que también se presentan son la creatividad y la motivación, elementos transversales de gran importancia en un aula. El tercero, que yo considero muy importante, es que la invención de problemas reduce la ansiedad que a muchos estudiantes les crean las matemáticas, haciéndolas más atractivas. Otro aspecto positivo (4º) es que disminuye la cantidad de errores cometidos durante los procedimientos. El último aspecto tiene gran relevancia desde el punto de vista del docente: aporta al profesor en la tarea evaluadora, ya que "la invención de problemas permite evaluar, en los estudiantes, su conocimiento, su manera de razonar y su desarrollo conceptual." (p. 32)

Este último apartado se tendrá en cuenta especialmente, ya que se incluirá una evaluación formativa (además de la sumativa con el examen del bloque de derivadas). La evaluación sumativa es la que se lleva a cabo habitualmente en institutos y el objetivo es evaluar el aprendizaje del estudiante al final de un curso comparándola con un estándar. En la evaluación formativa se va modelando al alumnado a través de los datos obtenidos durante las clases. Este tipo de evaluación aumenta el rendimiento escolar y es considerada más adecuada. En el caso de la intervención posterior, se usarán ambas.

Retomando el tema de la invención de problemas, psicólogos y pedagogos como Paulo Freire, Paul R. Pintrich, Jean Piaget, M. Page, etc. son partidarios de utilizar las experiencias de los estudiantes para enseñar. Ellos sostienen que los estudiantes aprenden mejor cuando se relacionan los diferentes conceptos con la realidad que les rodea. Así, la invención de problemas, como actividad personal de cada estudiante relacionada con su propia realidad, puede ayudar a los alumnos a superar las dificultades que tienen con los problemas de optimización.

Pasemos a continuación a mostrar como las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) pueden aportar a los problemas de optimización. La importancia de las TICs, en la resolución de problemas y el desarrollo de la clase, ya aparece en el año 1998 en el artículo de Camacho y González (1998), en el que estudian los problemas de optimización con una calculadora gráfica con Derive y Cabri-Géomètre. Si desde ese momento se usaban las, entonces nuevas, tecnologías para ayudar a los alumnos ahora se deberá hacer con mayor motivo.

En el marco de las TICs creo que también merece una mención las redes sociales, blogs de contenidos, páginas webs de profesores y otras plataformas donde se pueden encontrar actividades para el aula, recursos, metodologías, etc.

Dentro de la multitud de opciones que podemos encontrar en el mundo de internet una de las más completas en mi opinión es la del profesor Antonio Omatos (http://mates.aomatos.com/). En su página se pueden encontrar actividades, metodologías, juegos, etc. De hecho, a través de su página conocí la metodología de Dan Meyer basada en “3 Act Maths”, matemáticas en 3 actos.

Dan Meyer busca a través de las actividades matemáticas en 3 actos involucrar a los alumnos en las clases para conseguir un aprendizaje “desde dentro”. Seguramente haya muchos otros profesores y pedagogos que podrían ser citados como referentes, pero considero a los dos que he mencionado de especial importancia dentro de la intervención que he planteado.

En lo que respecta a las nuevas tecnologías, para desarrollar la intervención didáctica se trabajará con GraspableMaths. GraspableMaths (GM) es una herramienta que presenta una pizarra blanca con las siguientes funcionalidades extendidas:

- Permite realizar operaciones de simplificación paso a paso y observarlos posteriormente.
- Permite sustituir ecuaciones en otras.
- Puedes introducir texto, ecuaciones y realizar dibujos.
- Permite operar con Geogebra y YouTubede forma integrada en la aplicación web.
- Permite guardar, cargar y distribuir las hojas realizadas.

Su aspecto se puede observar en la figura 2:

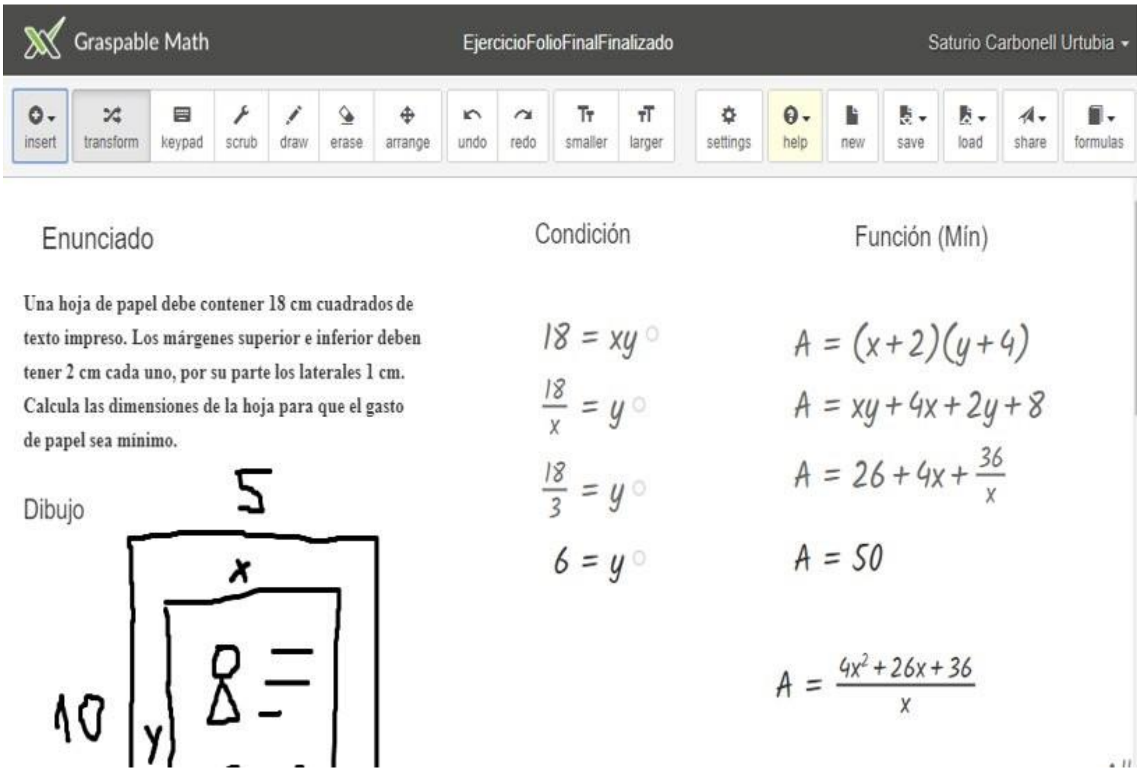


Figura 2. Captura de GraspableMaths (elaboración propia)

Una característica que considero fundamental en dicha herramienta es que: si el alumno no sabe las operaciones y pasos a seguir, la herramienta no resuelve el problema. Esto se debe a que la herramienta únicamente realiza los pasos que el usuario indica que realice, no tiene “inteligencia matemática” (Geogebra, WolframAlpha o PhotoMath sí que resuelven de forma autónoma).

En Weitnauer, Landy & Ottmar (2016), los creadores de la herramienta presentaron un estudio piloto donde con dos grupos A y B se resolvieron problemas con y sin GM. En dicho estudio con GM se resolvieron más problemas y la propagación de errores fue mucho menor.

En el estudio alaban también la gran usabilidad de la herramienta, ya que es muy intuitiva y se puede usar con facilidad.

Personalmente, estoy de acuerdo con esta afirmación ya que no me supuso ninguna dificultad trabajar con la herramienta y en todo tiempo logré un dominio avanzado.

Para la resolución de problemas de optimización resulta adecuada ya que los procedimientos para resolver el problema los realizan los estudiantes, GM solo asiste con las cuentas.

Además, en el desarrollo de las prácticas se usó GM con muy buenos resultados, ya que los estudiantes mostraron una actitud positiva hacia la herramienta, interesándose por cómo utilizarla para los ejercicios.

Queda así concluido el marco teórico donde se han revisado los fundamentos teóricos, las aportaciones científicas recientes y los contenidos estudiados durante el máster. Todo ello se utilizará en la intervención didáctica que viene a continuación.

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

El objetivo principal de esta intervención es conseguir que los alumnos sepan resolver y entender los problemas de optimización. Los problemas de optimización aparecen por primera vez en el currículo académico en la asignatura Matemáticas I de bachillerato. En ese curso es en el que está planteada la intervención.

Durante las cinco sesiones que componen la intervención didáctica se utilizarán distintas metodologías que son las que se explican a continuación.

Metodologías.

Mesas por parejas

En base a la información presentada sobre la adolescencia, la colocación de las mesas puede afectar al comportamiento de la clase. Colocando las mesas de forma individual se crea un clima individualista, donde no existe interacción entre los alumnos y el profesor lo tiene muy difícil para atender a las necesidades de cada uno. Además, como hemos visto previamente en las características de la adolescencia, los alumnos pueden tender a aislarse en ellos mismos.

Sin embargo, colocando las mesas por grupos se crea un clima de cooperación, donde los alumnos pueden aprender no sólo del profesor sino también entre ellos.

Por lo tanto, las mesas de la clase estarán dispuestas por parejas ya que considero que es más adecuado para los alumnos.

Trabajo por grupos pseudo aleatorios

En determinadas ocasiones se harán grupos para realizar actividades en clase. Para formar los grupos, diseñados de forma que sean heterogéneos, se repartirán unas tarjetas (figura 3) a los alumnos que permiten formar distintas agrupaciones en función del criterio que elijamos. La principal ventaja de este tipo de tarjetas es que se pueden formar distintos grupos (3, 4, 6 u 8 personas) fijando el criterio por el que se forman. Las tarjetas de los alumnos se reparten en los primeros días del curso y se podrán cambiar en cada trimestre o cuando el profesor lo considere oportuno. Además, el profesor dispondrá de “tarjetas de grupos” que permiten elegir el criterio y fijar el lugar donde se juntarán los alumnos.

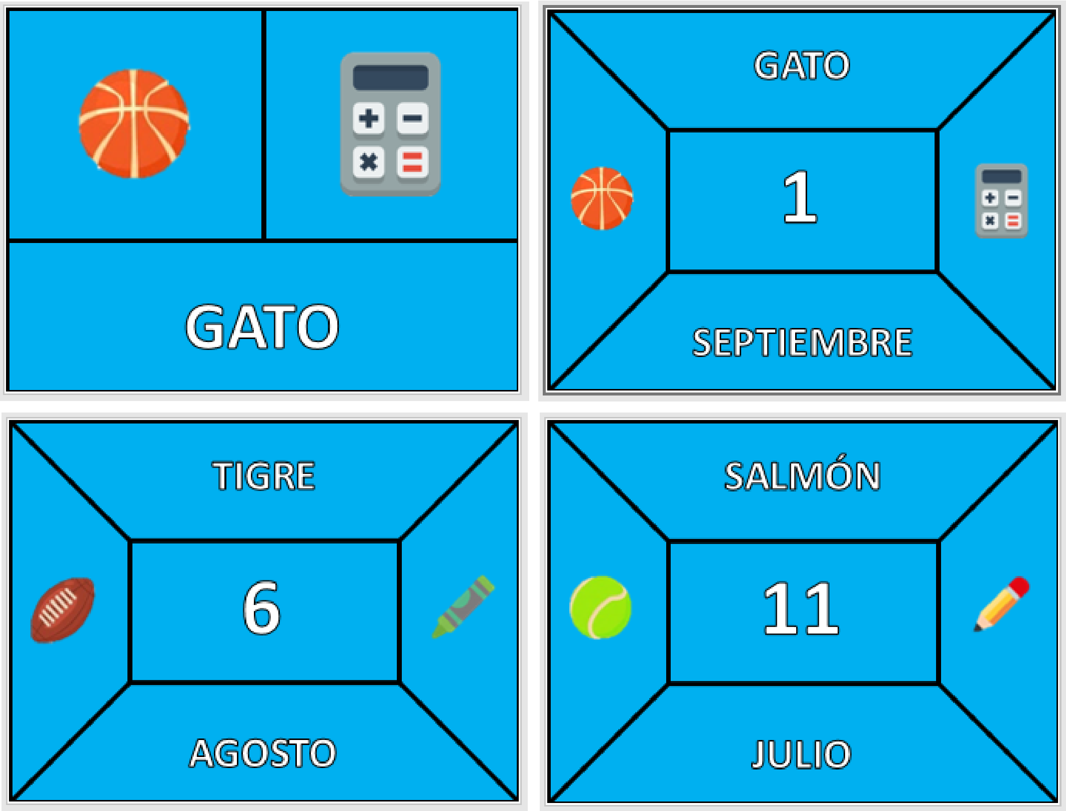


Figura 3. Tarjetas de grupos (primera) y alumnos. Propia

Cuando se formen los grupos de 3 alumnos, estos se colocarán en las mesas en las que habitualmente estaban dos personas. De esa forma se rompe la estructura de la clase y se consigue una mayor interacción entre los alumnos porque tienen que compartir el sitio. Si la actividad requiere que estén atentos a la pizarra se utilizarán las mesas más cercanas a la pizarra para hacer los grupos. Si por el contrario conviene que los grupos estén separados se usarán las mesas exteriores.

3 Act Maths Dan Meyer

La idea de esta metodología es presentar a los alumnos un problema que consiga hacer un clic en sus cerebros, que les sugiera una pregunta más o menos obvia y la necesidad de saber la respuesta. Para ello divide la clase en 3 actos (como si de una obra de teatro se tratase):

- Acto 1: Se presenta la situación o problema de una situación llamativa e interesante que suscite preguntas. En esta fase, no se dan datos y se trata de que los alumnos empiecen a pensar las estrategias de resolución y se hagan las primeras preguntas. Las preguntas tienen que venir de los alumnos, no del profesor.
- Acto 2. Una vez que la pregunta (o preguntas) aparece, se pasa al segundo acto que consiste en la búsqueda de una solución. Una de las máximas de Dan Meyer es que el profesor es más cuanto menos se le necesite. En lugar de ofrecerle los datos hay que forzar a que sea el propio alumno quien los pida, junto con mediciones o estimaciones. Incluso podríamos hacer que los invente.
- Acto 3. Una vez resuelto el problema, se presenta la solución y se corrobora la misma. Se abre la discusión acerca del resultado y de conceptos que normalmente no usamos como las aproximaciones. Si vemos un gran interés de los alumnos podemos abrir otras vías de investigación.

Esta metodología se ha elegido por su dinamismo y capacidad para involucrar al alumnado. Considero que puede ser un punto de partida adecuado en sesiones de introducción a nuevos contenidos.

Clases en 3 fases: Metodología tradicional

Durante las clases de Procesos y Contextos Educativos se nos explicó el concepto de las fases de la clase: inicio, desarrollo y final. Esta forma de impartir las clases se encuentra dentro de la metodología de clase magistral. En este formato de clase el profesor es el centro de la explicación y es el que transmite los contenidos a los alumnos.

En el inicio es importante explicar los objetivos, lo que tienen que aprender. Además, en esta primera parte de la clase es conveniente crear un clima agradable. Por lo tanto, al principio de la clase hay que crear clima y marcar objetivos, eso es la hoja de ruta.

En la segunda fase se produce el desarrollo de la clase y es donde se produce principalmente el aprendizaje (o al menos la iniciación a los conceptos que queremos que aprendan). Hay que intentar que las tareas que utilicemos para transmitir ese conocimiento sean tareas constructivas. Conviene estructurar bien el contenido y utilizar palabras clave, ya que permiten focalizar la atención y fijar los conocimientos. De vez en cuando utilizar síntesis integradoras.

La última fase de la clase es el cierre. En el cierre de la clase hay que buscar una recuperación de los conceptos dados en el desarrollo para que capten de nuevo en los estudiantes. Así se produce una reestructuración del conocimiento y éste se interioriza. También es interesante conseguir un clima de relajación en el que los estudiantes puedan disfrutar del aprendizaje logrado.

Con esta metodología se plantean sesiones en las que haya que explicar contenidos de gran importancia y en los que los detalles técnicos sean esenciales. Así, cuando haya que presentar a los alumnos un método específico para resolver ecuaciones o problemas este formato puede ser el adecuado.

Graspable Maths como base de exposición

Se plantean actividades que han sido organizadas y desarrolladas en GraspableMaths. Dentro de la herramienta se tienen multitud de posibilidades. En el uso que se le da dentro de esta intervención didáctica destacan los vídeos (de YouTube) y Geogebra. Ambas aplicaciones se pueden mostrar embebidas en GM para así poder usar la pizarra blanca (digital) para hacer anotaciones relevantes (aunque a mí personalmente me parece más útiles realizarlas en la pizarra de clase) o para organizar los contenidos (al tener “scroll continuo” podemos alargar infinitamente los contenidos hacia abajo).

Exposición breve de los alumnos

Esta metodología presenta similitudes con el concepto de “flipped classroom” que se presentó durante las clases del máster. Sin embargo, los alumnos lo que expondrán en este caso es un problema de optimización que ellos mismos han resuelto.

Con la exposición de los alumnos se pretende que desarrollen la comunicación lingüística, la competencia tecnológica y el sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. Además, al tener que presentar el problema con GraspableMaths no tienen que usar ningún software auxiliar para la exposición.

Estas son las principales metodologías y técnicas que se utilizarán en la intervención didáctica. Sin más dilación, pasemos a ver las sesiones programadas.

Temporalización y actividades.

Voy a proceder a mostrar una tabla con las actividades organizadas en sesiones y posteriormente explicaré cada sesión.

PROGRAMACIÓN DE LAS SESIONES	
1º SESIÓN	Introducción a los problemas de optimización.
2º SESIÓN	Método de resolución de ejercicios de optimización
3º SESIÓN	Resolución de ejercicios a trozos
4º SESIÓN	Problemas no directos con el método y reflexión
5º SESIÓN	Exposición breve de los problemas de optimización pensados por los alumnos

Tabla 2. Planificación de sesiones

1ª Sesión: Introducción a los problemas de optimización

La sesión la vamos a estructurar en dos partes: en la primera se resolverá el problema “el círculo y el cuadrado” con la metodología de Dan Meyer en 3 actos; en la segunda se resolverá el problema “la caja de clase” por grupos.

<u>3 Act Maths de Dan Meyer con el problema de “el circulo y el cuadrado”</u>

Esta actividad se trabajará por grupos heterogéneos de 3 personas para mejorar la comunicación entre los miembros del equipo y favorecer el aprendizaje interpersonal.

El enunciado del problema (figura 4) se proporciona mediante un vídeo a los alumnos. En el vídeo se puede observar como con un fragmento de cuerda se dobla para formar un círculo y un cuadrado. Según se elija el punto por el que se divide en cuadrado y círculo se obtienen figuras de área mayor o menor. Posteriormente se da el dato de la longitud de la cuerda: mide 40 cm.

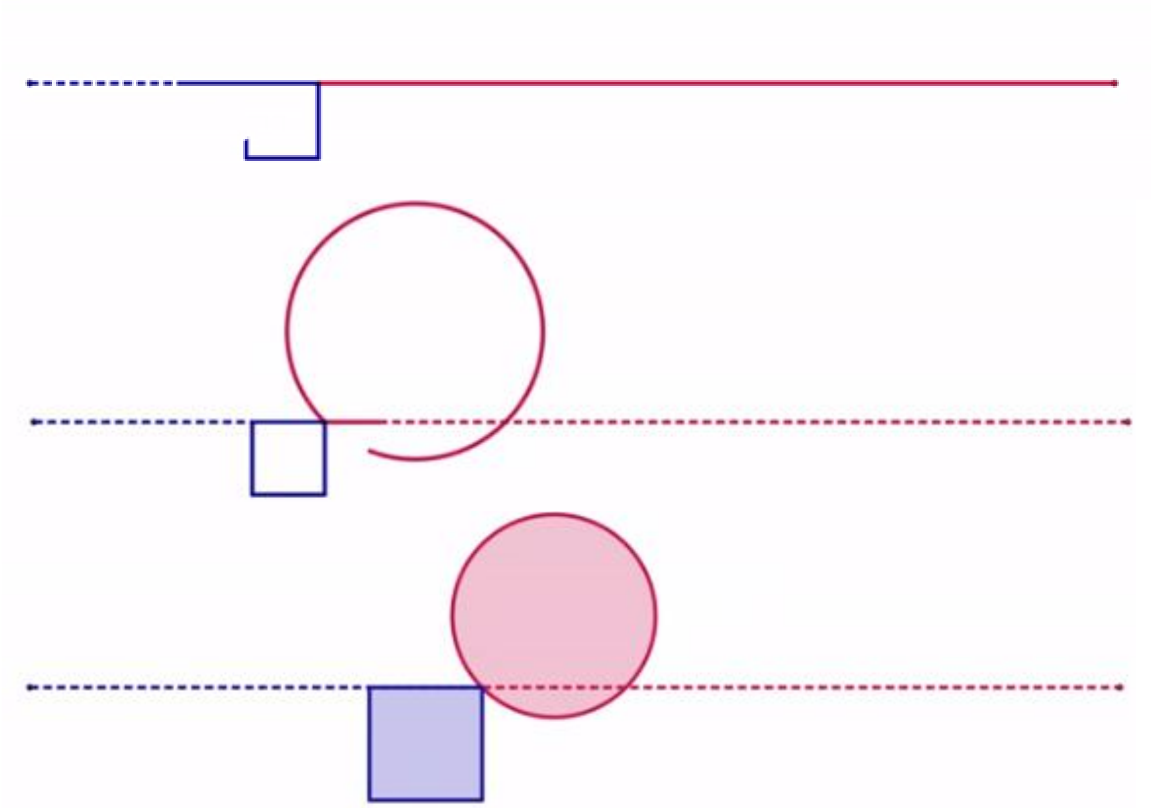


Figura 4. Capturas del “enunciado” del problema. Recurso Web

En el primer acto se mostrará el video del problema donde los alumnos deberán entender el enunciado matemático intrínseco, la formación de las figuran, la variación de las áreas, los elementos constantes, etc. Una vez reconocidos dichos elementos se dará paso al segundo acto.

En el segundo acto se proporcionan los datos del problema y se les pregunta sobre el área total. En relación con el área se formulan dos preguntas: ¿Cuándo las dos áreas son iguales?, ¿Cuándo la suma de las áreas es mínima?

Para resolver la primera pregunta hay que resolver un sistema de ecuaciones, mientras que para la segunda hay que resolver un problema de optimización. Este acto termina cuando se resuelve el sistema y se deja planteada la función a optimizar.

En el tercer acto se resuelve el problema de optimización, mediante la derivada y la búsqueda de extremos. También se dan unas primeras nociones del método que permite resolver problemas de optimización.

La resolución se realizará dentro de GM, con un applet de Geogebra que muestra el punto óptimo que minimiza las áreas. Finalmente, la solución se podrá compartir con los alumnos a través de la opción de Google Classroom que GM tiene incorporada.

<u>Problema para fijar contenidos. "La caja de clase"</u>

Con esta segunda parte de la sesión buscamos reforzar el procedimiento de calcular el extremo de una función. Este proceso es lo que en última instancia resuelve los problemas de optimización. El problema es el siguiente:

Problema *La caja de clase*

Pedro está en clase y necesita formar una caja para tirar los restos del sacapuntas. Tiene a mano medio folio con el que construir la caja, formando cuatro cuadrados iguales en las esquinas y doblando paralelamente a los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones y el volumen de la máxima caja que puede formar?

En este ejercicio cuando se plantea la función a optimizar solo encontramos una incógnita y por lo tanto solo hay que derivar. Además, el enunciado se puede replicar en la vida real ya que vamos a tener un DIN A5 a mano. Para motivar a los alumnos se les informa que después de realizar el problema se comprobará la solución con arroz y una taza medidora para ver qué grupo lo ha sabido construir mejor.

Con estas dos actividades finaliza la primera sesión de introducción a los problemas de optimización.

2ª Sesión: Método de resolución de ejercicios de optimización

En esta sesión se pretende formalizar el método para resolver problemas de optimización que se esbozó en la sesión anterior. Los pasos para resolver un problema de optimización son:

1. Dibujo representativo (en el que se incluyan las variables) del problema tras una lectura detallada del enunciado
2. Identificación de la expresión algebraica de la condición que tiene que cumplir las posibles soluciones del problema
3. Identificación de la expresión algebraica de la función (suele tener dos o más variables) que hay que maximizar/minimizar.
4. Reducción de la función a optimizar a una sola incógnita mediante la sustitución de la(s) condición(es) en la función.
5. Búsqueda de extremos en la función en una sola variable. Para ello se deriva la expresión y se iguala a cero.
6. Comprobación de los candidatos a extremos mediante el signo de la derivada primera en sus proximidades o la derivada segunda en esos puntos.
7. Interpretación del resultado y solución final.

Estos pasos conviene agruparlos en los conceptos de los problemas que se resuelven. Así, los pasos 1, 2 y 3 corresponden a planteamiento del problema. En el paso 4 se realiza la sustitución de la condición y la preparación de la función a optimizar. Los pasos 5 y 6 corresponden a búsqueda y verificación de extremos, donde se aplican realmente los conceptos de la derivada. Por último, en el paso 7 se interpreta el resultado obtenido y se responde con la solución final.

La explicación de los pasos se realizará con la aplicación de GraspableMaths (ver figura 5) mientras se resuelve el problema “Hoja papel impresa” y se explica cómo se utiliza la herramienta.

Problema *Hoja de papel impresa*:

El profesor de matemáticas quiere imprimir un tangram (rectángulo) de 18 cm cuadrados para repartir a los alumnos. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales tienen que ser de 1 cm por cada lado. Esos márgenes los utilizarán los alumnos para apuntar conceptos importantes. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

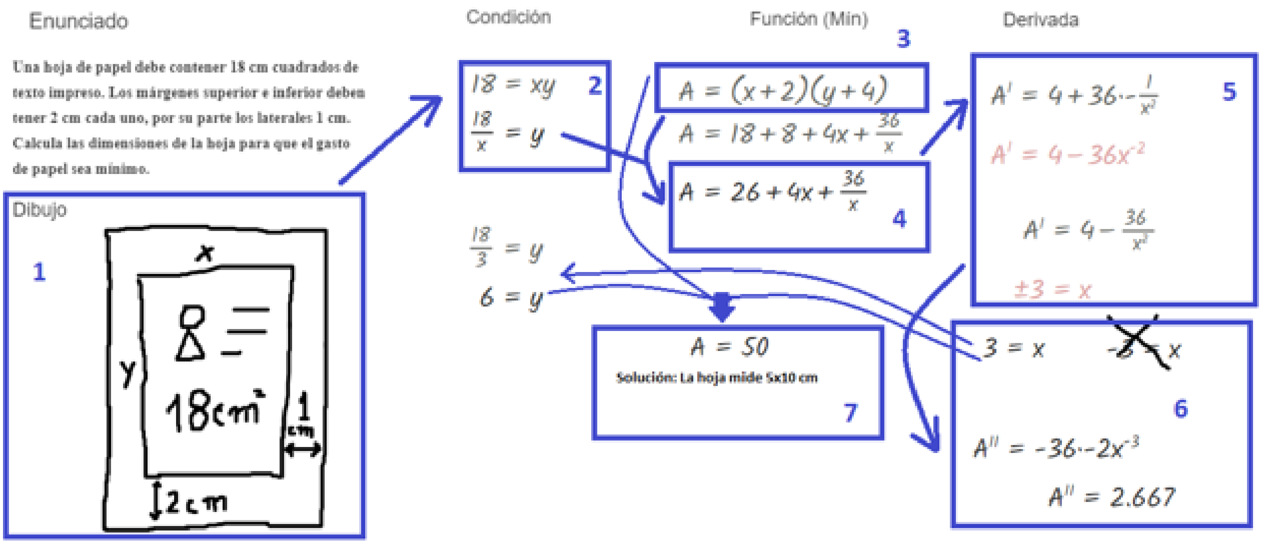


Figura 5. Captura de GraspableMaths con los pasos descritos (elaboración propia).

En la resolución de los ejercicios se propone realizar una especie de plantilla (tanto en GraspableMaths como en el cuaderno) donde se resuelve de forma ordenada el problema.

Para mostrar también un ejemplo de cómo se realiza en “papel” se resuelve el problema “Carrera de nadadores” en la pizarra (citándolo como ejemplo de problema original). En este momento, se les informa de que tendrán que inventarse por grupos un problema de optimización y resolverlo. Ese problema se expondrá en la 5ª sesión y deberá ser resuelto con GraspableMaths.

Problema “*Carrera de nadadores*”:

Alice y Bob son socorristas de la playa de Salou y caminando por la orilla de la playa ven a 30 metros a una persona con dificultades para salir a flote. Esta persona está justo enfrente de la bandera de la orilla que está a 24 metros de los socorristas. Bob, que nada a 1.8 m/s se lanza directamente al agua hacia la persona. Alice es capaz de correr por la orilla a 6 m/s y nadar a 1.4 m/s. ¿Puede Alice llegar antes que Bob para socorrer a la persona en apuros? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo?

La resolución la llevará a cabo el profesor, pero realizando preguntas a los alumnos de forma que ellos intervengan directamente en la resolución del problema. Tras resolver el problema se mostrará la solución en Geogebra dentro de GraspableMath.

Al finalizar la sesión se habrá explicado el método de optimización a los alumnos y proporcionado dos ejemplos concretos de su aplicación. Además, los problemas realizados son de una dificultad mayor de los que se trabajan habitualmente pero así los alumnos tienen un ejemplo más representativo.

3ª Sesión: Resolución de ejercicios (3) a trozos

La idea de esta sesión es reconocer los problemas de los alumnos al realizar los ejercicios de optimización en los distintos apartados para así elaborar estrategias para ayudarles.

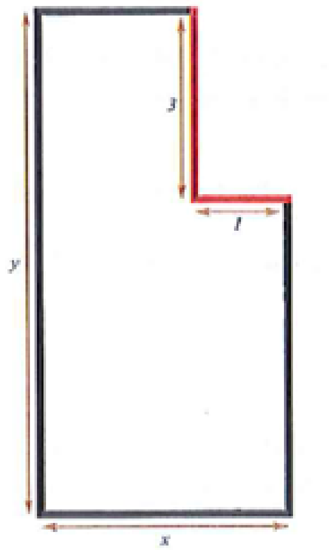
De esta forma, los alumnos trabajan en cada momento una fase distinta de la resolución matemática y es más fácil observar donde tienen dificultades.

Los problemas para resolver serán: “Números optimizados”, “En el patio haciendo yoga” y “Nova tiene hambre”.

Problema *Números optimizados:*

Descompón el número 44 en dos sumandos tales que la suma del quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínima.

Problema *En el patio haciendo yoga:*



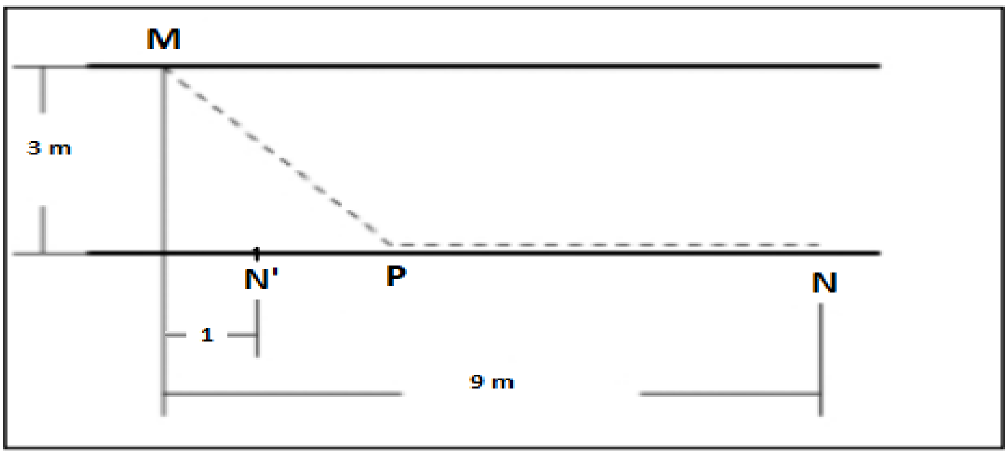
La profesora de educación física quiere que delimitemos un trozo rectangular para realizar un juego sobre un saliente del patio como el que se observa (en rojo) en el dibujo.

Nos ha pedido que el área sea de 22 metros cuadrados y que el perímetro sea el mínimo posible porque no sabe cuantos metros de cuerda tiene. ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura pedida?

Al final nos dice que en total tiene 36 metros de cuerda y que hagamos el campo lo más grande posible. ¿Cuál es la mayor área que podemos formar?

Problema *Nova tiene hambre:*

Nova (N), la perrita apadrinada de la clase, se encuentra a un lado de un río de 3 metros de anchura, y ve un trozo de chorizo de pueblo al otro lado (N). La situación es la siguiente:



La velocidad de Nova por el agua (M-P) es de 4 m/s, y por tierra (P-N) de 5 m/s. ¿Cuántos metros debe recorrer Nova por cada medio para comerse el chorizo lo antes posible? Si Nova estuviera situada en N', ¿cuál sería el camino más rápido?

Como se puede apreciar, algunos enunciados tienen dos condiciones distintas (usadas en resoluciones distintas). Esto permite aprovechar el tiempo ya que con un contexto similar se crean dos problemas que luego se resolverán.

En la primera parte de la resolución parcial de ejercicios se resolverán los puntos 1, 2 y 3 (el planteamiento) quedando el problema planteado. De esta forma se trabaja principalmente la competencia lectora y la competencia de expresión matemática.

Tras el planteamiento de todos los problemas se solucionan las dudas que hayan podido surgir en este aspecto. Hay que asegurarse de que, efectivamente, todos los alumnos han comprendido como se plantean. Es interesante comentar también que un buen planteamiento puede evitar cuentas excesivas en la resolución posterior.

Una vez resueltas las dudas se realiza el paso 4 del método (sustitución y acondicionamiento) para cada uno de los problemas, obteniendo siempre una función con una sola incógnita. Al igual que en el apartado anterior se resuelven las dudas que puedan surgir.

Por último, se resuelve al menos un ejercicio de forma completa. (Si vemos que no va a dar tiempo a resolver algún ejercicio se podría dejar en algún problema el paso 4 sin realizar). Los ejercicios que queden sin acabar se deberán terminar en casa (en el cuaderno) y al menos uno de ellos se deberá resolver con GraspableMaths. Se les vuelve a recordar que tendrán que entregar un ejercicio original planteado por ellos resuelto en GraspableMaths.

Toda esta sesión se realizará en los sitios de referencia, por lo que estarán situados por parejas. Es beneficioso ya que los alumnos tendrán así que explicar a su compañero el significado de las variables.

Al final de la sesión se recogerán unas hojas donde los alumnos han ido escribiendo su respuesta inicial en la resolución de cada ejercicio.

Esa hoja será de la siguiente forma (Tabla 3):

MESA 5	
Alumno 1	**Alumno 2**
Problema 1	
Variables:	**Variables:**
Condición(es):	**Condición(es):**
Función: (mín/Máx)	**Función: (mín/Máx)**
Función (una sola incógnita):	**Función (una sola incógnita):**
Problema 2	
...	...

Tabla 3. Plantilla de respuesta (elaboración propia)

Como se puede observar la hoja se reparte por mesas y los alumnos tienen que dar una respuesta conjunta y podrán hablar con su compañero para dar la misma respuesta (aunque si no consiguen ponerse de acuerdo cada uno puede dar la respuesta que considere correcta).

Con esta hoja se realizará parte de la evaluación formativa de la que ya se habló en el marco teórico.

4ª Sesión: Problemas no directos con el método y reflexión

Con esta sesión se pretende profundizar en algunos problemas que el método presentado en clase sería insuficiente sin una interpretación adecuada del alumno. Ese tipo de problemas se pueden encontrar en la vida real y su interpretación ayuda a dar la optimización de forma global y entender mejor el concepto. Además, su estudio particular ayuda a comprender el funcionamiento del método y entender cada uno de los pasos.

Como ejemplo de problemas que no se podrían resolver (estrictamente) con el método encontramos aquellos en los que la función solo puede tomar valores enteros o en los que el extremo buscado no cumple las restricciones del enunciado (que habitualmente no se estudian expresamente en los problemas). Otros casos en los que no nos adentraremos son aquellos en los que la función no es derivable.

Durante la clase se resolverán los problemas de “La casa rural de Ezcaray”, “El constructor logroñés”, y “El bote de TUCs”.

Problema *La casa rural de Ezcaray:*

En una casa rural (premium pro) de Ezcaray alquilan las habitaciones con forfait para esquiar a 100€. Con este precio, en una noche tienen 15 clientes. Los propietarios se han fijado en que, por cada 5€ que rebajan el precio por noche, tienen un cliente más. ¿Cuál es el valor óptimo, al que tiene que cobrar la habitación, para ganar el máximo dinero posible?

Problema *El constructor logroñés:*

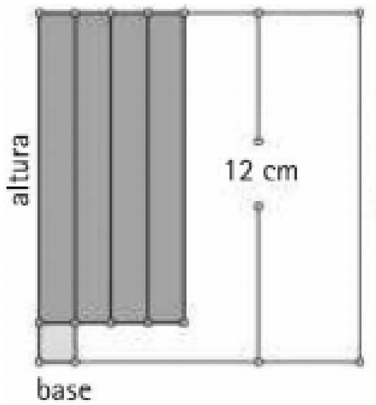
Un constructor logroñés se plantea hacer un bloque de viviendas en un terreno que ha comprado. Teniendo en cuenta distintas variables ha llegado a la conclusión que la ratio de beneficios (venta/coste) en función del número de habitaciones tiene la siguiente fórmula (para un número de habitaciones mayor que 1):

$$R.B. = x\,(x\,(1.20714 - 0.142857\,x) - 3.18071) + 4.62043$$

¿Cuál es el número de habitaciones óptimo para sacar el máximo beneficio? Si la fórmula fuese válida también para viviendas de una sola habitación, ¿seguiría siendo óptimo este resultado?

Problema *El bote de TUCs:*

Después de una merendola en el instituto han sobrado unas galletas cuadradas. Para guardarlas los alumnos proponen hacer una especie de bote (prisma rectangular de base cuadrada) con un cuadrado de cartón de 12 cm de lado. La base del bote se construye con ese cartón. ¿Cuál es el volumen máximo del bote?, ¿qué superficie tiene su base?



En los dos primeros casos, el valor de la función en el que se alcanzan las condiciones óptimas corresponde a un valor decimal que no se puede tomar. Para obtener la solución final lo que hay que hacer es probar con los valores enteros más cercanos (exceso y defecto) que puede tomar la función y comprobar para cuál de los dos se obtiene un mejor resultado.

En el último caso el valor en el que se alcanza el valor óptimo no sería posible físicamente porque está fuera de los rangos de valores que puede tomar la función. En este problema lo que hay que hacer para obtener la solución es ver la evolución de la función, crecimiento/decrecimiento con la derivada primera, y coger el máximo o mínimo del rango de valores permitidos.

Durante la sesión los alumnos estarán en sus sitios habituales porque la importancia recae en las explicaciones del profesor y las reflexiones que se hagan florecer en los alumnos.

Al final de la sesión se sorteará el orden de los grupos que expondrán los problemas en la siguiente sesión.

5ª Sesión: Exposición breve de los problemas de optimización pensados por los alumnos

Esta sesión se plantea para una clase de 24 alumnos donde se han formado 8 grupos de 3 personas (los de la sesión de introducción). Por lo tanto, cada grupo dispone de entre 4 y 5 minutos.

Antes del comienzo de la sesión todos los alumnos han tenido que leer el enunciado de los otros grupos. Se podrá comprobar preguntando a algún alumno si este está despistado o sin prestar atención sobre el contenido del problema que estén exponiendo sus compañeros (restándoles nota en el caso de respuesta errónea).

En las presentaciones deberán hablar los 3 miembros del equipo y se recomienda que uno explique el planteamiento, otro los pasos 4 y 5 y el último la comprobación e interpretación del resultado (aunque pueden repartírselo de otra forma).

Después de cada presentación el profesor hará un pequeño comentario (de menos de 1 minuto) comentando el trabajo del equipo. La nota final la recibirán al día siguiente después de que el profesor haya revisado las entregas.

Criterios de evaluación

Como hemos visto anteriormente, los contenidos explicados en esta intervención didáctica se engloban dentro del bloque de análisis de 1º (o 2º) de bachiller. Por lo tanto, los contenidos explicados en la intervención no se evaluarán de forma independiente.

Durante la segunda sesión se realizaron unos ejercicios en clase que se entregaron al profesor y esos se contabilizan dentro de una evaluación **formativa**, ya que resulta más adecuada para el alumnado.

El problema inventado por los alumnos tendrá un peso considerable en el bloque de la derivada, ya que sustituirá a 1 punto del examen del bloque (pudiendo sacar los alumnos hasta 1.5 puntos si el problema lo mereciera).

Sobre los 9 puntos restantes del examen, al menos 1.5 puntos serán sobre problemas de optimización repartidos en dos ejercicios. El primero será un problema de optimización donde aplicar el método completo y el segundo un apartado de algún ejercicio donde la función a optimizar sea ya conocida. El primer problema donde se aplicará el método completo será una adaptación de los problemas inventados por los alumnos.

DISCUSIÓN

Globalmente la intervención didáctica busca corregir las deficiencias que tienen los estudiantes en la resolución de los problemas de optimización.

La intervención didáctica está diseñada para impartirse en 1º de bachillerato en Matemáticas I (aunque con ligeras modificaciones se podría impartir en 2º también). Se ha diseñado para impartir en dicho nivel ya que es cuando se ve por primera vez la noción de derivada y sus aplicaciones. Además, en primero se tiene algo más de tiempo para dar el currículo que en segundo, por lo que se adecúa mejor a las necesidades del profesor.

Otra ventaja de impartirlo en dicho curso es que se crea una sólida base que luego en 2º se puede ampliar y reforzar. Además, dado que los problemas de optimización son un contenido problemático y que en la EBAU suelen preguntar es mejor, en mi opinión, empezar a trabajarlos cuanto antes.

Respecto a los contenidos de la intervención didáctica, al buscarles ejemplos cercanos y conseguir llamar su atención mediante clases más dinámicas les motivamos a aprender y que las clases sean provechosas. La intervención se ha estructurado en 5 sesiones de tal forma que cuando se lleve a la práctica en el aula siempre haya un fin de semana donde los alumnos puedan trabajar la parte de invención de problemas. Con ese fin de semana se pretende que asienten los conocimientos aprendidos y empiecen a elaborar el problema de optimización.

Un punto fuerte de la intervención didáctica es cómo están balanceadas las sesiones y los contenidos matemáticos que se trabajan en ellas:

En la primera sesión se introduce la optimización en una actividad por grupos que favorece el aprendizaje interpersonal. Además, con la metodología escogida se motiva a los alumnos a querer resolver el problema, ya que resulta intrigante. Durante la resolución se relacionan las nuevas técnicas con otras anteriormente estudiadas, como puede ser la resolución de sistemas. Esto se consigue gracias las preguntas que se realizan a la clase sobre el problema. Además, la puesta en escena de la primera actividad cuenta con una interfaz matemática muy potente que aumenta las competencias tecnológicas de la clase. Con el desarrollo de la segunda actividad se fijan los conocimientos adquiridos y se refuerza el concepto principal de los problemas de optimización: obtener el extremo de una función. La incorporación de la medición de los resultados proporciona a la clase un aliciente para obtener la “mejor solución”.

Con la segunda sesión se presenta el método habitual para resolver los problemas de optimización. Dicho método se fracciona en pasos a seguir numerados de tal forma que el alumno sepa identificar cada paso con contenidos que previamente sabe. Junto con la explicación del método se aplica paso a paso en un problema típico de optimización que se resuelve con el apoyo de GraspableMaths. Posteriormente, al resolver un segundo ejercicio con la ayuda de los alumnos se les involucra en la clase y se les hace partícipes de la solución. Este segundo ejercicio se resolverá en la pizarra para enseñar a los alumnos como los pueden resolver sin la ayuda de tecnologías porque así se les preguntará en el examen. También, al resolverlo de esta forma se predica con el ejemplo. Por último, destaca la presentación y organización de los problemas dentro de una plantilla para dotar a los alumnos de un método ordenado para resolver ejercicios.

La tercera sesión nos sirve para entender el razonamiento de los alumnos cuando resuelven los problemas. Al dividir el método de resolución en una secuencia de pasos podemos comprender perfectamente cuales son los pasos que suponen una mayor dificultad para los alumnos. Estos pasos se explicarán de nuevo hasta que todos hayan entendido el proceso. Durante la clase, como trabajan por parejas para ponerse de acuerdo en la solución final de cada apartado se mejora la expresión matemática y la capacidad de razonamiento (y exposición). Como deberes, tendrán que finalizar la resolución de un ejercicio con GraspableMaths, lo que supone un primer contacto con la herramienta para que cuando tengan que resolver el problema que ellos mismos hayan inventado no tengan dificultades.

En la cuarta sesión se profundiza en el método para resolver problemas de optimización al aplicarlo a problemas cuya resolución no es directa. Con ello conseguimos intrigar a los estudiantes para que reflexionen sobre el método y lo entiendan de una forma completa. Además, en la resolución de este tipo de problemas especiales se consigue dar una visión global a la optimización y ampliar el tipo de problemas que se pueden resolver (problemas que como hemos visto en el marco teórico no se resuelven correctamente). Esta sesión es la última en la que el desarrollo de la clase recae en el profesor y sirve para concluir los contenidos de los problemas de optimización.

En la sesión final los alumnos presentan los problemas de optimización que ellos mismos han pensado y resuelto con la herramienta GraspableMaths. La propia herramienta sirve además como medio para presentar el problema. En esta sesión se trabajan competencias más transversales como son la competencia digital, aprender a aprender, competencia lingüística y, por supuesto, la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. En esta clase los alumnos tienen la posibilidad de aprender de sus compañeros y desarrollar su sentido crítico durante las exposiciones.

Estas cinco sesiones son las que componen la intervención didáctica. En otro contexto me hubiera gustado poder haber planificado más sesiones para la intervención, pero el curso en el que se sitúa y con el currículo actual no sería posible sin comprometer el resto de los contenidos.

Se podría considerar un inconveniente de esta propuesta la intensidad de las sesiones pero, al mismo tiempo esto se puede convertir en una ventaja dado que el gran dinamismo y la motivación favorecerán la implicación de los estudiantes.

CONCLUSIONES

En la elaboración del presente trabajo de fin de máster se han tenido en cuenta todas las asignaturas que he recibido en este año. Cada profesor y cada actividad han aportado una parte de conocimiento que se ha materializado en este documento.

Cuando decidí que quería ser profesor (y por lo tanto que iba a cursar el máster de profesorado) no pensé que fuera a aprender tantas cosas como realmente ha ocurrido. Desde características sobre las familias hasta técnicas de resolución de conflictos. Los aspectos fundamentales de la didáctica matemática y la disposición en grupos de los alumnos para trabajar la combinatoria. Todos estos contenidos y muchos más se han trabajado en las distintas asignaturas.

En lo que respecta al TFM me ha servido para profundizar en las explicaciones de los problemas de optimización, un tipo de ejercicios que desde que era alumno ya me fascinaban y no entendía como a otros compañeros les resultaban tan difíciles de entender.

Esta vez los he trabajado desde el punto de vista del docente, valorando cada ejercicio en función de lo que podía aportar a los alumnos, si lo encontrarían interesante, cómo hacer para que les motive… En cada fase buscaba conseguir un material que les fascinase tanto como me fascina a mí.

Por ello, ya desde el principio del trabajo se ha situado el foco en los alumnos. Los objetivos principales del trabajo eran el medio para conseguir un material de mejor calidad y adaptado a las tecnologías actuales (y venideras).

La revisión teórica y metodológica ha permitido profundizar en la situación para localizar las dificultades puntuales que impedían que el conocimiento llegara a los alumnos. Además, dichas dificultades se intentan corregir con el material que se ha elaborado para la intervención didáctica, buscando la calidad. Calidad que se ha logrado mediante un buen criterio de curación de contenido y la mejora personal en la competencia tecnológica que ha permitido llevarlo a cabo.

Todo este proceso se desarrolla en un clima motivador y que fomente una disposición positiva hacia las matemáticas.

Para lograrlo, en la intervención didáctica se han planteado nuevas metodologías y técnicas que obtienen el mayor potencial de los alumnos a través de las TICs y el aprendizaje interpersonal.

El culmen del aprendizaje se alcanza cuando los alumnos no solo son capaces de resolver los problemas de optimización, sino que incluso inventan nuevos problemas basados en los conocimientos adquiridos.

Como dijo Einstein (Figura 6):

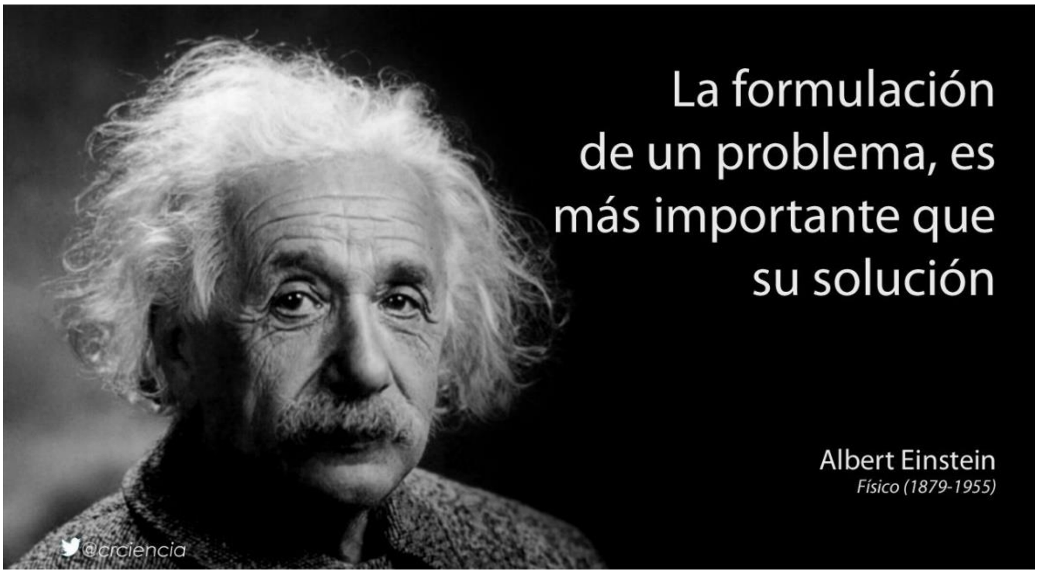


Figura 6. Cita Einstein. Twitter @crciencia.

REFERENCIAS

- Ayllón Blanco, M. F., & Gómez Pérez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *EA, Escuela abierta: revista de Investigación Educativa*, (17), 29-40.
- Baccelli, S. G., Anchorena, S., Moler, E. G., Aznar, G., & Andrea, M. (2013). Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *84*, 99-113.
- Balcaza, T., Contreras, Á., & Font, V. (2017). Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 2017, vol. 31, num. 59, p. 1061-1081*.
- Camacho Machín, M. & González Martín, A. S. (1998). Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, (10), 137-152.
- Giné de Lera, C., & Deulofeu Piquet, J. (2012). El uso del contexto en problemas de optimización: una investigación con alumnos de bachillerato. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (61), 87-96.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 recuperada de https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Omatos, A. (2017, 9 mayo). Método 3acts de Dan Meyer [Publicación en un blog]. Recuperado de http://mates.aomatos.com/metodo-3acts-de-dan-meyer/
- Tapia, K. (2018, 12 abril). Adolescencia Media: Edad, Cambios Físicos y Psicológicos. Recuperado de https://www.lifeder.com/adolescencia-media/
- Weitnauer, E., Landy, D., & Ottmar, E. (2016). Graspable math: Towards dynamic algebra notations that support learners better than paper. In *2016 Future Technologies Conference (FTC)* (pp. 406-414). IEEE.

Recursos web

- https://ggbm.at/auxfxhnK
- https://www.101qs.com/2859-circlesquare
- https://www.geogebra.org/m/gR9g66DQ

Documentos oficiales

- https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2015-738 (Competencias)
- https://bit.ly/2Kd4bVY (Currículo BOR)

ANEXOS

Problemas

La caja de clase

Pedro está en clase y necesita formar una caja para tirar los restos del sacapuntas. Tiene a mano medio folio con el que construir la caja, formando cuatro cuadrados iguales en las esquinas y doblando paralelamente a los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones y el volumen de la máxima caja que puede formar?”

Hoja de papel impresa

El profesor de matemáticas quiere imprimir un tangram (rectángulo) de 18 cm cuadrados para repartir a los alumnos. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales tienen que ser de 1 cm por cada lado. Esos márgenes los utilizarán los alumnos para apuntar conceptos importantes. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

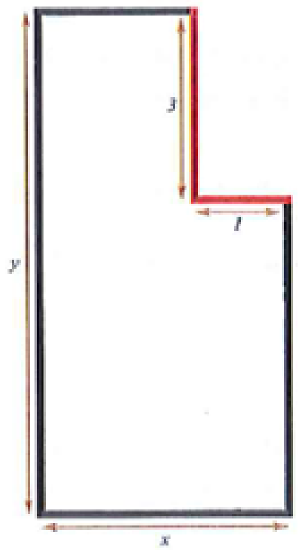
Carrera de nadadores

Alice y Bob son socorristas de la playa de Salou y caminando por la orilla de la playa ven a 30 metros a una persona con dificultades para salir a flote. Esta persona está justo enfrente de la bandera de la orilla que está a 24 metros de los socorristas. Bob, que nada a 1.8 m/s se lanza directamente al agua hacia la persona. Alice es capaz de correr por la orilla a 6 m/s y nadar a 1.4 m/s. ¿Puede Alice llegar antes que Bob para socorrer a la persona en apuros? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo?

Números optimizados

Descompón el número 44 en dos sumandos tales que la suma del quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínima.

En el patio haciendo yoga



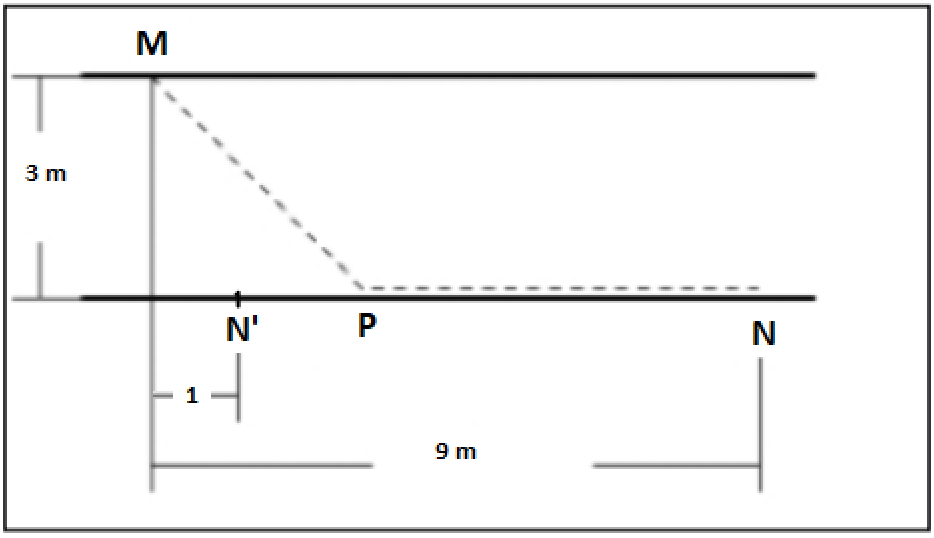
La profesora de educación física quiere que delimitemos un trozo rectangular para realizar un juego sobre un saliente del patio como el que se observa (en rojo) en el dibujo.

Nos ha pedido que el área sea de 22 metros cuadrados y que el perímetro sea el mínimo posible porque no sabe cuantos metros de cuerda tiene. ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura pedida?

Al final nos dice que en total tiene 36 metros de cuerda y que hagamos el campo lo más grande posible. ¿Cuál es la mayor área que podemos formar?

Nova tiene hambre

Nova (N), la perrita apadrinada de la clase, se encuentra a un lado de un río de 3 metros de anchura, y ve un trozo de chorizo de pueblo al otro lado (N). La situación es la siguiente:



La velocidad de Nova por el agua (M-P) es de 4 m/s, y por tierra (P-N) de 5 m/s. ¿Cuántos metros debe recorrer Nova por cada medio para comerse el chorizo lo antes posible? Si Nova estuviera situada en N', ¿cuál sería el camino más rápido?

La casa rural de Ezcaray

En una casa rural (premium pro) de Ezcaray alquilan las habitaciones con forfait para esquiar a 100€. Con este precio, en una noche tienen 15 clientes. Los propietarios se han fijado en que, por cada 5€ que rebajan el precio por noche, tienen un cliente más. ¿Cuál es el valor óptimo, al que tiene que cobrar la habitación, para ganar el máximo dinero posible?

El constructor logroñés

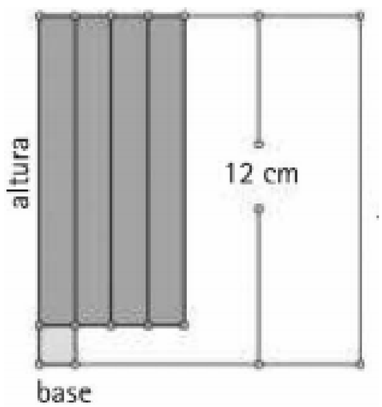
Un constructor logroñés se plantea hacer un bloque de viviendas en un terreno que ha comprado. Teniendo en cuenta distintas variables ha llegado a la conclusión que la ratio de beneficios (venta/coste) en función del número de habitaciones tiene la siguiente fórmula (para un número de habitaciones mayor que 1):

$$R.B. = x\,(x\,(1.20714 - 0.142857\,x) - 3.18071) + 4.62043$$

¿Cuál es el número de habitaciones óptimo para sacar el máximo beneficio? Si la fórmula fuese válida también para viviendas de una sola habitación, ¿seguiría siendo óptimo este resultado?

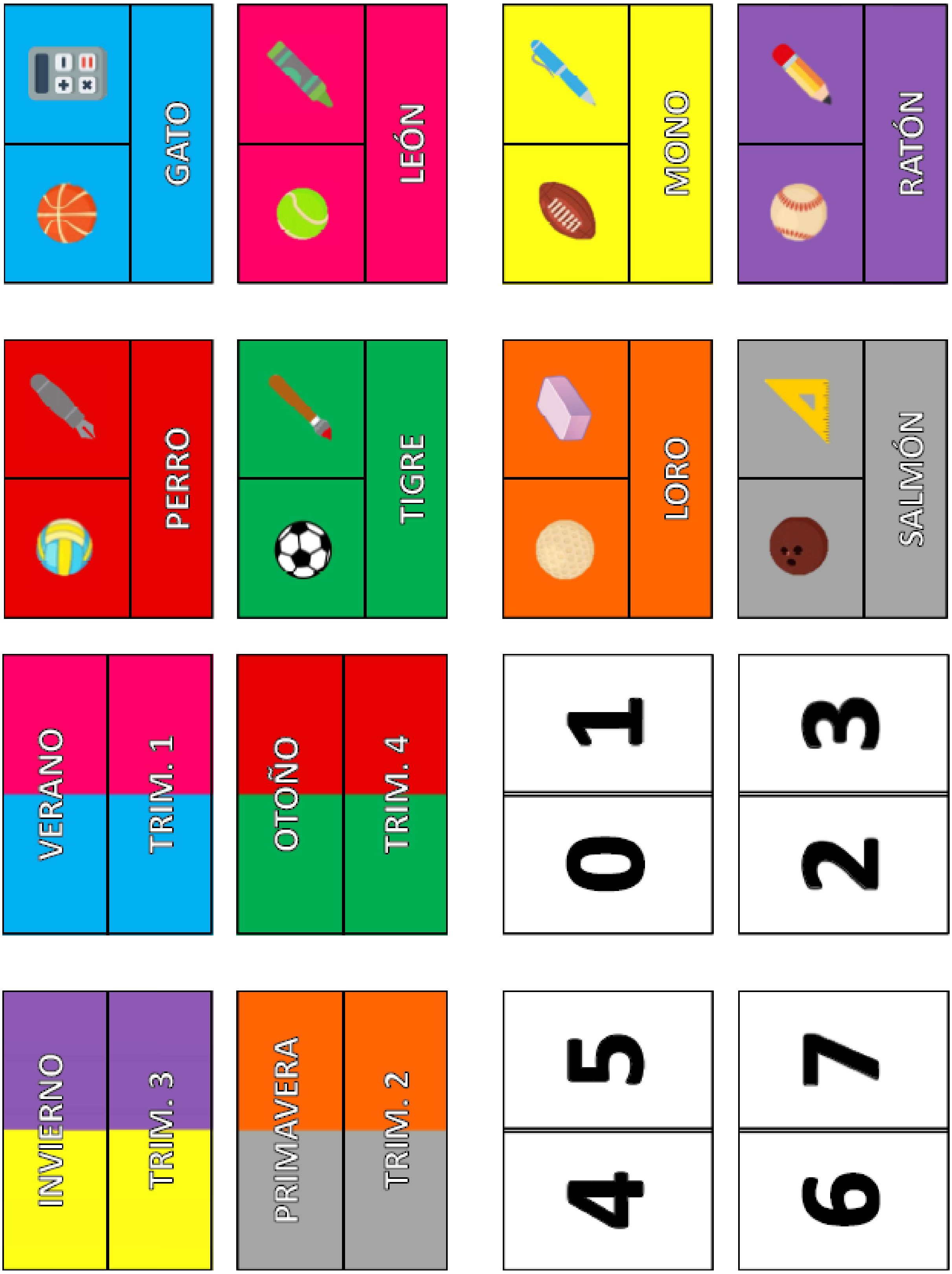
El bote de TUCs:

Después de una merendola en el instituto han sobrado unas galletas cuadradas. Para guardarlas los alumnos proponen hacer una especie de bote (prisma rectangular de base cuadrada) con un cuadrado de cartón de 12 cm de lado. La base del bote se construye con ese cartón. ¿Cuál es el volumen máximo del bote?, ¿qué superficie tiene su base?

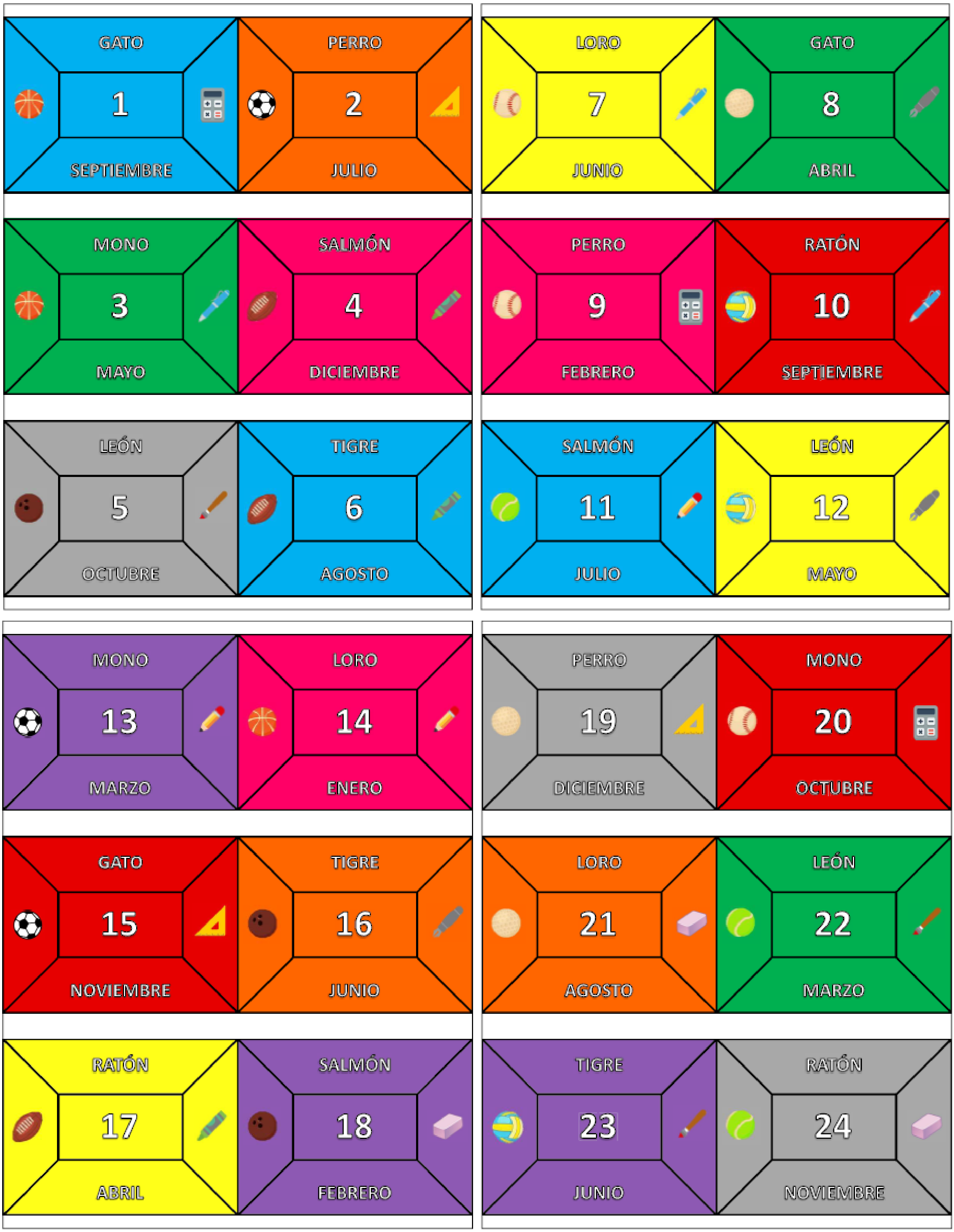


Tarjetas de grupos

Creación y selección de grupos



Tarjetas de los alumnos



Competencias clave en el Sistema Educativo Español

A efectos de Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, las competencias clave del currículo son las siguientes:

a) Comunicación lingüística.
b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
c) Competencia digital.
d) Aprender a aprender.
e) Competencias sociales y cívicas.
f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
g) Conciencia y expresiones culturales.

Currículo de problemas de optimización en 1º de bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. Análisis. Matemáticas I		
Funciones reales de variable real. Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos. Operaciones y composición de funciones. Función inversa. Funciones de oferta y demanda. Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones. Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal. **Función derivada**. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena. Representación gráfica de funciones.	1. Identificar funciones elementales, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan. 2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo. 3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas **al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.** 4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	1.1. Reconoce analítica y gráficamente las funciones reales de variable real elementales. 1.2. Selecciona de manera adecuada y razonada ejes, unidades, dominio y escalas, y reconoce e identifica los errores de interpretación derivados de una mala elección. 1.3. Interpreta las propiedades globales y locales de las funciones, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. 1.4. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones en contextos reales. 2.1. Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones. 2.2. Determina la continuidad de la función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función, para extraer conclusiones en situaciones reales. 2.3. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. **3.1. Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.** 3.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena. 3.3. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto. 4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.